

APLICACION DE UN EJERCICIO DE PRACTICAS DE CALCULO DINAMICO AL PROYECTO DE PUENTES

Alarcón, E.; Huerta, M^a C.; Gómez Lera M^a S.
Cátedra de Estructuras (E.T.S.I.I.). Universidad Politécnica de Madrid.
José Gutierrez Abascal, 2. 28006-Madrid. Tfn (91) 5626200. FAX (91) 5618618

Resumen.- Este artículo describe un método simplificado para el estudio de la importancia de los modos locales en el establecimiento de las cargas para el dimensionamiento de las pilas de puentes.

1. INTRODUCCION Y OBJETIVOS

El cálculo sísmico de puentes es un tema de moda tras los espectaculares fallos acaecidos durante terremotos recientes y la continua construcción de obras de infraestructura en regiones sísmicas.

Los problemas dinámicos planteados por los puentes son cualitativamente diferentes de los de edificación, incluso para el caso más sencillo de vibraciones longitudinales en pasos superiores rectos. A pesar de ello las Normas actuales proponen un método simplificado de "fuerzas equivalentes" basado en la aplicación del Método de Rayleigh que no es de aplicación inmediata al cálculo de movimientos transversales o verticales ya que está basado en un sólo modo; además, como se indica mas adelante, la introducción de apoyos elásticos entre tablero y pilas puede inducir modos locales que son de importancia capital para el cálculo de los esfuerzos en los pilares y que el calculista puede olvidar si aplica a ciegas las reglas habituales de truncamiento modal (por ejemplo el criterio del 90 % de la masa movilizada).

El motivador de este estudio fue el puente bosquejado en la figura 1.

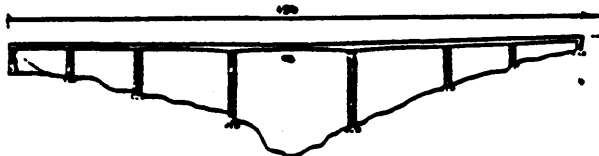


Figura 1

El cortante en la base necesitaba un gran número de modos para ser representado de forma relativamente correcta. La figura 2a muestra alguno de los primeros modos mientras que la 2b compara el primero con dos modos locales que son claves para representar el comportamiento de las columnas.

El objetivo del artículo es desarrollar un modelo de dos grados de libertad con el que se muestre la importancia de la vibración de los pilares siguiendo un desarrollo asintótico propuesto por Kelly (1988) en otro contexto.

2. EL EJERCICIO DE CLASE DE PRACTICAS

Para asimilar el puente al ejemplo típico de 2 g.d.l. utilizado por nuestros alumnos, se utiliza el esquema de la figura 3. La masa principal "M" representa el tablero, mientras que la secundaria "m" es la parte de la columna asociada a la forma desplazada. La rigidez del pilar es k_p y k_n la de los neoprenos que forman la conexión elástica.

El análisis se basa en los parámetros ω_n y ω_p definidos por:

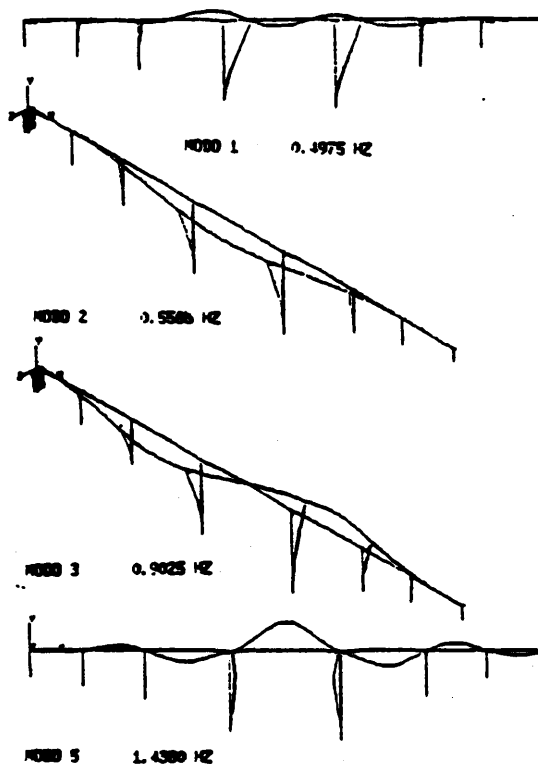


Figura 2a

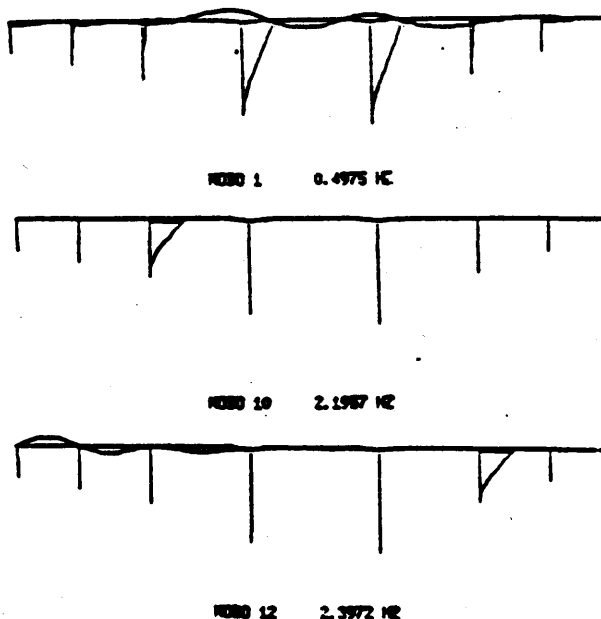


Figura 2b

$$\omega_s^2 = \frac{\alpha k_n}{M} \quad (1)$$

$$\omega_p^2 = \frac{k_n + k_p}{m} \quad (2)$$

donde α es el número de conexiones elásticas equivalentes sobre las que se apoya el tablero.

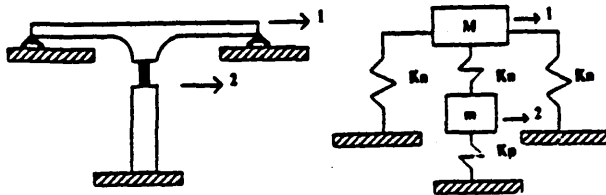


Figura 3

Otros dos índices característicos son:

$$\epsilon = \frac{\omega_s^2}{\omega_p^2} \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{M}{m} \quad (4)$$

que ligam las propiedades elásticas e inerciales de tablero y columna.

2.1 Proceso general.

El análisis de vibraciones libres se plantea en la forma habitual

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha k_n & -k_n \\ -k_n & k_n + k_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

o

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (5)$$

que permite la determinación de frecuencias naturales y modos en la forma

$$\begin{bmatrix} \omega_s^2 - \omega^2 & -\frac{\omega_s^2}{\alpha} \\ -\frac{\omega_s^2}{\gamma\alpha} & \omega_p^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

Así

$$\begin{aligned} \left[\frac{\omega_1}{\omega_s} \right]^2 &= \frac{1}{2\epsilon} \left[(1+\epsilon) - \sqrt{(1+\epsilon)^2 - 4\epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{\gamma\alpha^2} \right)} \right] \\ \left[\frac{\omega_2}{\omega_p} \right]^2 &= \frac{1}{2} \left[(1+\epsilon) + \sqrt{(1+\epsilon)^2 - 4\epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{\gamma\alpha^2} \right)} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

y la matriz modal es

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_s} \right)^2 \right] & \alpha \left[1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_s} \right)^2 \right] \end{bmatrix} \quad (8)$$

Para una aceleración sísmica actuando en la base

$$m\ddot{x} + kx = -mJ\ddot{x}_s \quad (9)$$

donde J es el vector de arrastre.

Los factores de participación son

$$\Gamma_i = \frac{\phi_i^T m J}{\phi_i^T m \phi_i} = \frac{1 + \alpha \gamma \left[1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega_s} \right)^2 \right]}{1 + \gamma \alpha^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega_s} \right)^2 \right]^2} \quad (10)$$

$$i = 1, 2$$

y las masas movilizadas

$$M_i = \Gamma_i^2 \Phi_i^T M \Phi_i = M \frac{1 + \alpha \gamma \left[1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega_s} \right)^2 \right]}{1 + \alpha^2 \gamma \left[1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega_s} \right)^2 \right]}$$

$$i = 1, 2$$

(11)

mientras que las cargas equivalentes para cada modo son

$$F_i = M \Gamma_i \left[\frac{1}{\alpha \gamma \left[1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega_s} \right)^2 \right]} \right] PSA(\omega_i; \zeta_i)$$

$$i = 1, 2$$

(12)

donde $PSA(\omega_i; \zeta_i)$ es el valor de la pseudoaceleración correspondiente a la frecuencia ω_i y al índice de amortiguamiento ζ_i .

2.2 Análisis asintótico.

En las aplicaciones prácticas la rigidez de los pilares es al menos un orden de magnitud superior a la de los apoyos elásticos y lo mismo sucede con las masas de tablero y pilares.

Por ello es razonable suponer

$$\varepsilon \sim \frac{\alpha}{100}$$

(13)

$$\gamma \sim \frac{1}{10}$$

para analizar el comportamiento de las fórmulas precedentes.

Operando en (7) se tiene

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_s} \right)^2 = \frac{1}{2\varepsilon} \left[1 + \varepsilon - (1 - \varepsilon) \sqrt{1 + \frac{4\varepsilon^2}{\gamma \alpha^2 (1 - \varepsilon)}} \right]$$

(14)

y

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_p} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[(1 + \varepsilon) + (1 - \varepsilon) \sqrt{1 + \frac{4\varepsilon^2}{\gamma \alpha^2 (1 - \varepsilon)}} \right]$$

(15)

Usando las limitaciones (13) es fácil mostrar que

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_s} \right)^2 = 1 - \frac{1}{\gamma \alpha^2} \varepsilon$$

(16)

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_p} \right)^2 = 1 + \frac{1}{\gamma \alpha^2} \varepsilon^2$$

lo que significa que con gran precisión $\omega_2 = \omega_p$.

Usando estas aproximaciones en la ecuación 10 se obtienen los siguientes factores de participación

$$\Gamma_1 = \frac{1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}}{1 + \frac{\varepsilon^2}{\gamma \alpha^2}} \sim 1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

(17)

$$\Gamma_2 = \frac{1 + \alpha \gamma - \frac{\gamma \alpha}{\varepsilon}}{1 + \gamma \alpha^2 \left[1 - \frac{1}{\varepsilon} \right]^2} \sim - \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

y las masas movilizadas

$$M_1 \sim M \left[1 + \frac{2\varepsilon}{\alpha} \right]$$

(18)

$$M_2 \sim \gamma M = m$$

Si γ es del orden del 10 % queda claro que una regla del tipo "90 % de la masa movilizada" evitaría el uso del segundo modo. Por otro lado, la contribución de ese modo al cortante en la base es muy elavado. Usando la ecuación 12 las fuerzas equivalentes del primer modo son

$$F^{(1)} = (PSA) \begin{bmatrix} M \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha} \right) \\ M \frac{\varepsilon}{\alpha} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha} \right) \end{bmatrix}$$

(19)

es decir, teniendo en cuenta los α soportes, el cortante en la base es

$$Q^{(1)} = M(PSA)_1 \frac{1+\varepsilon}{\alpha} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \quad (20)$$

mientras que, para el segundo modo

$$F^{(2)} = (PSA)_2 \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon M}{\alpha} \\ M\gamma(1-\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (21)$$

que conduce a

$$Q^{(2)} = M(PSA)_2 \left[\gamma(1-\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\alpha^2} \right] \quad (22)$$

Tomando, por ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\alpha} &\sim \frac{1}{100} \\ \gamma &\sim \frac{1}{10} \\ \alpha &\sim 8 \end{aligned} \quad (23)$$

$$Q^{(1)} = M (PSA)_1 \, 0,1362$$

$$Q^{(2)} = M (PSA)_2 \, 0,1098$$

que claramente indica la importancia del segundo modo para el cálculo del pilar. Esta importancia puede crecer si la segunda frecuencia es mucho mayor que la primera de tal modo que los valores espectrales caigan en la meseta del espectro.

3. APLICACION PRACTICA

A continuación se realiza la aplicación de las fórmulas anteriores al puente de la figura 1.

Una vez que la columna analizada ha sido seleccionada, el primer paso es establecer el número α de conexiones elásticas equivalentes. Como la frecuencia ω_1 (ecuación 1) se establece fijando la columna y desplazando el tablero, la rigidez "equivalente" es una combinación de la de las columnas y sus correspondientes conexiones. Es fácil ver que

$$\alpha = 1 + \frac{1}{k_n^i} \sum_{j=1}^n \frac{k_p^j k_n^j}{k_p^j + k_n^j} \quad (24)$$

donde k_n es la rigidez elástica de los neoprenos y k_p la de las columnas, mientras que "i" se refiere al pilar en estudio y "j" al resto de columnas del puente.

La rigidez de cada columna depende obviamente de las condiciones de contorno, especialmente en relación con el esquema de colocación de los soportes elásticos en el extremo libre de la columna. En el caso en estudio se encontró que una combinación ponderada de las condiciones fijo-libre y fijo-fijo tal que

$$k_p = \frac{3}{4} k_p^{fx-free} + \frac{1}{4} k_p^{fx-fixed} \quad (25)$$

produce los mejores resultados.

La tabla I compara los resultados obtenidos con diferentes procedimientos. La fila 1 corresponde al cortante en la base, sin tener en cuenta los modos locales. Como puede verse la tercera fila obtenida usando las ecuaciones 20, 22 es comparable con aquellos resultados y lo mismo sucede cuando la comparación se realiza entre una superposición de modos más exacta (30 modos) y el modelo propuesto.

	Column number			
	2	3	6	7
MODAL ANALYSIS				
9 Modes	89	88	88	92
30 Modes	224	238	253	200
SYNPLIFIED ANALYSIS				
1st mode contrib	86	82	83	89
1st + 2nd	202	209	222	181

Tabla I

Por ejemplo, la columna 6 se obtuvo

$$\alpha = 13,95$$

$$\gamma = 3,69 \cdot 10^{-2}$$

$$\varepsilon = 3,98 \cdot 10^{-2}$$

$$M = 1,12 \cdot 10^7 \text{ Kg}$$

$$m = 0,414 \cdot 10^6 \text{ Kg}$$

$$(PSA)^1 = 1,1139 \frac{m}{\text{seg}^2}$$

$$(PSA)^2 = 5,3663 \frac{m}{\text{seg}^2}$$

que conduce a las siguientes contribuciones al cortante basal

$$Q^1 = 0,82 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$Q^2 = 2,06 \cdot 10^6 \text{ N}$$

cuya composición con la regla SRSS produce el mencionado valor de 222 ton.

CONCLUSIONES

Se ha presentado la utilidad de un ejercicio académico para detectar la contribución de modos locales en puentes. Es interesante observar que el método permite una estimación cualitativa de la importancia de los modos cuya contribución a la sollicitación de las columnas puede ser definitiva.

REFERENCIAS

Kelly, J 1988. "Base Isolation in: Theory, testing & implementation of seismic base isolation systems". Madrid: Instituto E.T. de la Construcción y del Cemento.